Les variables aléatoires à densité

M3 – Chapitre 4

I. Définition

$$X \text{ v.a. a densité de densité } f(t) \Leftrightarrow \begin{cases} F_X \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ F_X \text{ de classe } \mathcal{C}^1 < \text{ sur } \mathbb{R} \\ \quad \text{(sauf en un nbr fini de pts)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \\ f \geq 0 \end{cases}$$

II. Fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad F_X = \int f$$

<u>Note :</u> Pour les variables à densité, $< \Leftrightarrow \leq$ et $> \Leftrightarrow \geq$

III. Changement de variable aléatoire

$$Y = g(X) \text{ a une densité } \Leftrightarrow \begin{cases} F_Y \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ F_Y \text{ de classe } \mathcal{C}^1 < \text{ sur } \mathbb{R} \\ \quad \text{(sauf en un nbr fini de pts)} \end{cases}$$

IV. Somme de deux variables aléatoires à densité

X de densité f
Y de densité g
X, Y indep.

$$Z = X + Y \text{ a une densité } \boxed{h(x) = f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt}$$

avec $*$ produit de convolution

V. Espérance

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,dt} \qquad \text{(si elle existe)}$$

$$\boxed{E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, f(t)\,dt} \qquad E(aX+b) = aE(X) + b$$

VI. Variance

$$V(X) = E\big(X - E^2(X)\big) = E(X^2) - E^2(X) \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sqrt{V(X)}$$

VII. Lois usuelles

1. Loi uniforme

$$X \hookrightarrow U_{[a;b]}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a;b] \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

2. Loi exponentielle

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Loi sans mémoire ou loi de vieillissement

X suit une loi sans mémoire si $\begin{cases} X \geq 0 \\ \forall (x, y) \in {\mathbb{R}^+}^2 \;\; P(X > x + y) = P(X > x)P(X > y) \end{cases}$

$$X \text{ suit une loi sans mémoire} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ \text{ou} \\ X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \end{cases}$$

Remarque :

$$\text{Si } \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \;\; P(X > x) > 0 \Rightarrow P_{(X > x)}(X > x + y) = P(X > y)$$